https://www.proconference.org/index.php/usc/article/view/usc11-01-021
DOI: 10.30888/2709-2267.2022-11-01-021

УДК 517.9

ABOUT THE PROPERTIES OF PERIODIC SOLUTIONS FOR SYSTEMS OF FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Denysenko N.L. / Денисенко Н.Л.
PhD in phys. and math. s. / к. фіз.-мат. н.
ORCID: 0000-0003-2150-7751
National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,
Peremohy ave.,37, Kyiv, Ukrane, 03056
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
м. Київ, проспект Перемоги, 37, 03056

Анотація. *В роботі досліджуються достатні умови існування періодичних розв'язків одного класу систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з малим параметром ε, а також досліджуються їх властивості при ε→0.*

Ключові слова: *диференціально-функціональні рівняння, відхилення аргумента.*

Abstract. *The paper establishes sufficient conditions for the existence of periodic solutions for a class of systems of nonlinear functional-differential equations with a small parameter ε; also, the properties of these solutions as ε→0 is studies.*

Key words: *functional-differential equations, deviations of argument.*

Вступ.

Розглядається система нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = Ax(t) + f\Big(t, x(t), x\big(\lambda_1 t + \psi_1(t, x(t))\big), \ldots, x\big(\lambda_k t + \psi_k(t, x(t))\big), \varepsilon\Big), \qquad (1)$$

де $\lambda_i \in N$, $i = \overline{1,k}$; $t \in R = (-\infty, +\infty)$; ε — достатньо малий невід’ємний скалярний параметр ($\varepsilon \in I = [0; \varepsilon_0]$, ε_0 є достатньо малим); A – дійсна стала $(n \times n)$-матриця; $f: R \times R^n \times \ldots \times R^n \times I \to R^n$, $\psi_i: R \times R^n \to R$, $i = \overline{1,k}$.

Різні частинні випадки таких рівнянь досліджувались багатьма математиками і на даний час існує велика кількість результатів, одержаних при вивченні різних питань. У даній роботі досліджується питання про існування T-періодичних розв’язків системи рівнянь (1) та їхні властивості.

Основний текст.

Нехай всі компоненти вектор-функції $f(t, x_0, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$ та функції $\psi_i(t, x)$, $i = \overline{1,k}$, є неперервними за всіма змінними і T-періодичними по t функціями, тобто

$$f\left(t+T, x(t), x\left(\lambda_1 t + \psi_1(t, x(t))\right), \ldots, x\left(\lambda_k t + \psi_k(t, x(t))\right), \varepsilon\right) \equiv$$
$$\equiv f\left(t, x(t), x\left(\lambda_1 t + \psi_1(t, x(t))\right), \ldots, x\left(\lambda_k t + \psi_k(t, x(t))\right), \varepsilon\right),$$

$$\psi_i(t+T, x(t)) \equiv \psi_i(t, x(t)), \; i = \overline{1,k};$$

та виконуються умови:

$$| f(\tilde{t}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k, \varepsilon) - f(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{x}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{x}}_k, \varepsilon) | \le l_1 (| \tilde{t} - \tilde{\tilde{t}} | + \sum_{i=0}^{k} | \tilde{x}_i - \tilde{\tilde{x}}_i |),$$

$$| \psi_i(\tilde{t}, \tilde{x}) - \psi_i(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{x}}) | \le l_2 (| \tilde{t} - \tilde{\tilde{t}} | + | \tilde{x} - \tilde{\tilde{x}} |), \; i = \overline{1,k}, \text{ де } \tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in R; \; \tilde{x}_i, \tilde{\tilde{x}}_i \in R^n, \; i = \overline{0,k};$$

$\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in R^n$; l_1, l_2 – деякі додатні сталі.

Припустимо, що власні значення a_j, $j = \overline{1,n}$, матриці A задовольняють умову $\operatorname{Re} a_j(A) \neq 0$, $j = \overline{1,n}$. Тоді існує неособлива матриця C, яка зводить матрицю A до вигляду $A = C^{-1} diag(A_1, A_2) C$, де A_1, A_2 – деякі сталі матриці розмірності $p \times p$ і $(n-p) \times (n-p)$, власні значення яких задовольняють умову

$$\operatorname{Re} a_j(A_1) < 0 \text{ при } j = 1, \ldots, p, \; \operatorname{Re} a_j(A_2) > 0 \text{ при } j = p+1, \ldots, n, \; 0 < p \le n. \quad (2)$$

Можна показати, що при $\varepsilon = 0$, виконуючи перетворення $\dot{x} = Ax(t) + y(t)$, система рівнянь (1) зводиться до наступної системи

$$y(t) = f\left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) y(\tau) d\tau, \; \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(\lambda_1 (t-\tau)\right) y\left(\lambda_1 \tau + \psi_1\left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y(s) ds \right) \right) d\tau, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \lambda_k \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(\lambda_k (t-\tau)\right) y\left(\lambda_k \tau + \psi_k\left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y(s) ds \right) \right) d\tau, 0 \right), \quad (3)$$

де

$$G(t) = \begin{cases} C^{-1} diag(e^{A_1 t}, 0) C & \text{при} \quad t > 0, \\ -C^{-1} diag(0, e^{A_2 t}) C & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Для системи рівнянь (3) має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) λ_i, $i = \overline{1,k}$, — *натуральні числа*;

2) *всі власні значення* a_j, $j=\overline{1,n}$, *матриці* A *такі, що має місце умова* (2), *тобто існують сталі* $K>0$ *і* $\alpha>0$ *такі, що* $|G(t)|\le Ke^{-\alpha|t|}$ *при всіх* $t\ne 0$;

3) *всі компоненти вектор-функції* $f(t,y_0,y_1,\dots,y_k,0)$ *є неперервними за всіма змінними, T-періодичними по t функціями і* $\max\limits_{t\in R}\left|f(t,0,\dots,0,0)\right|\le N<+\infty$;

4) *функції* $\psi_i(t,y)$, $i=\overline{1,k}$, *є неперервними за всіма змінними і T-періодичними по t*;

5) $|f(\tilde t,\tilde y_0,\tilde y_1,\dots,\tilde y_k,0)-f(\tilde{\tilde t},\tilde{\tilde y}_0,\tilde{\tilde y}_1,\dots,\tilde{\tilde y}_k,0)|\le l_1\left(|\tilde t-\tilde{\tilde t}|+\sum\limits_{i=0}^{k}|\tilde y_i-\tilde{\tilde y}_i|\right)$,

$$|\psi_i(\tilde t,\tilde y)-\psi_i(\tilde{\tilde t},\tilde{\tilde y})|\le l_2\left(|\tilde t-\tilde{\tilde t}|+|\tilde y-\tilde{\tilde y}|\right),\ i=\overline{1,k},$$

де $\tilde t,\tilde{\tilde t}\in R$, $\tilde y_i,\tilde{\tilde y}_i\in R^n$, $i=\overline{0,k}$, $\tilde y,\tilde{\tilde y}\in R^n$, $l_1=const>0$, $l_2=const>0$;

6) $\dfrac{2Kl_1}{\alpha}\left(1+k\left(\dfrac{2Kl\,l_2}{\alpha}+1\right)\right)<1$, $\dfrac{l_1}{l}\left(1+\dfrac{2Kl}{\alpha}+\dfrac{2Kl}{\alpha}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i+kl_2+\dfrac{2kKl\,l_2}{\alpha}\right)\right)\le 1$.

Тоді існує єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $\gamma=\gamma(t)$ *системи рівнянь* (3)*, що задовольняє умову* $\left|\gamma(\tilde t)-\gamma(\tilde{\tilde t})\right|\le l\,|\tilde t-\tilde{\tilde t}|$*, де* $\tilde t,\tilde{\tilde t}\in R$, $l=const>0$.

Таким чином, вектор-функція

$$\overline{x}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)\gamma(\tau)d\tau$$

є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (1), який задовольняє умову $\left|\overline{x}(\tilde t)-\overline{x}(\tilde{\tilde t})\right|\le\dfrac{2Kl}{\alpha}|\tilde t-\tilde{\tilde t}|$, де $\tilde t,\tilde{\tilde t}\in R$; $K,\ l,\ \alpha$ – деякі додатні сталі.

Також можна показати, що при $\varepsilon\ne 0$ за допомогою перетворень $x(t)=y(t)+\overline{x}(t)$ та $\dot y(t)=Ay(t)+z(t)$ система рівнянь (1) зводиться до такої системи рівнянь

$$z(t)=\varphi\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)z(\tau)d\tau,\ \lambda_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G\big(\lambda_1(t-\tau)\big)z\left(\lambda_1\tau+v_1\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)z(s)ds\right)\right)d\tau,\dots\right.$$

$$\left.\dots,\ \lambda_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G\big(\lambda_k(t-\tau)\big)z\left(\lambda_k\tau+v_k\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)z(s)ds\right)\right)d\tau,\varepsilon\right),\qquad(4)$$

для якої має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови:*

1) λ_i, $i = \overline{1,k}$, — *натуральні числа*;

2) *всі власні значення* a_j, $j = \overline{1,n}$, *матриці* A *такі, що має місце умова* (2), *тобто існують сталі* $K > 0$ *і* $\alpha > 0$ *такі, що* $|G(t)| \le Ke^{-\alpha|t|}$ *при всіх* $t \ne 0$;

3) *всі компоненти вектор-функції* $\varphi(t, y_0, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)$ *є неперервними за всіма змінними, T-періодичними по* t *функціями і* $\varphi(t, 0, \ldots, 0, 0) \equiv 0$, $\max\limits_{t \in R} \left|\varphi(t, 0, \ldots, 0, \varepsilon)\right| \le M < +\infty$;

4) *функції* $v_i(t, y)$, $i = \overline{1,k}$, *є неперервними за всіма змінними і T-періодичними по t*;

5) $|\varphi(\tilde{t}, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k, \varepsilon) - \varphi(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k, \varepsilon)| \le l_1 \left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + \sum\limits_{i=0}^{k} |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i| \right)$,

$$|v_i(\tilde{t}, \tilde{y}) - v_i(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{y}})| \le l_2 \left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + |\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}| \right), \; i = \overline{1,k},$$

де $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in R$, $\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{y}}_i \in R^n$, $i = \overline{0,k}$, $\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}} \in R^n$, $l_1 = const > 0$, $l_2 = const > 0$;

6) $\dfrac{2Kl_1}{\alpha} \left(1 + k \left(\dfrac{2KLl_2}{\alpha} + 1 \right) \right) < 1$, $\dfrac{l_1}{L} \left(1 + \dfrac{2KL}{\alpha} + \dfrac{2KL}{\alpha} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i + kl_2 + \dfrac{2kKLl_2}{\alpha} \right) \right) \le 1$.

Тоді існує єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $\eta = \eta(t, \varepsilon)$ *системи рівнянь* (4)*, що задовольняє умови*

$$\left|\eta(\tilde{t}, \varepsilon) - \eta(\tilde{\tilde{t}}, \varepsilon)\right| \le L |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|, \; \lim_{\varepsilon \to 0} \eta(t, \varepsilon) = 0,$$

де $t, \tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in R$, $L = L(\varepsilon) > 0$.

Отже, вектор-функція

$$\overline{y}(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) \cdot \eta(t, \varepsilon) d\tau$$

є єдиним неперервним на R T-періодичним розв'язком системи рівнянь (1) при $\varepsilon \ne 0$, що задовольняє умови

$$\left|\overline{y}(\tilde{t}, \varepsilon) - \overline{y}(\tilde{\tilde{t}}, \varepsilon)\right| \le \frac{2KL}{\alpha} |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|, \; \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{y}(t, \varepsilon) = 0,$$

де $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in R$; K, L, α – деякі додатні сталі.

Висновки.

Таким чином, з теорем 1, 2 приходимо до висновку, що система рівнянь (1) має єдиний неперервний на R T-періодичний розв'язок $\hat{x}(t, \varepsilon)$ такий, що

$$\hat{x}(t,\varepsilon) = \overline{y}(t,\varepsilon) + \overline{x}(t),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{x}(t,\varepsilon) = \overline{x}(t),$$

де $\overline{x}(t)$ − T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon = 0$, а $\overline{y}(t,\varepsilon)$ − T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon \neq 0$.

Література:

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.

2. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737–747.

3. *Денисенко Н. Л.* Періодичні розв'язки систем диференціально-функціональних рівнянь з параметром та їх властивості // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 2. — С. 181–202.